

Szerzői ajánlás a vektorok és a koordináta- geometria elemei c. projekthez

A Témakörhöz kapcsolódó történelmi áttekintés

A geometria történetének nagy alakjai közül Apollóniaergaiosz (Kr.e. 3. sz.) a „nagy géométerként” volt ismert. A kúpszeletekről írt könyvében algebrai jellemzést adott, így őt tekintik a téma modern tanai megalapítója előfutárának.

(L: Apollóniosz-féle kör.)

[Apollóniosz Düszholosz (Kr.e. 2. sz.) görög grammatikus volt, aki elsőként alkotta meg a görög szintaxist (mondattant).]



Huszka Jenő

Hipparkhosz (Kr. e. 2. sz.) miközben felfedezte a Föld tengelyének precesszióját (a Föld forgástengelyirányának lassú változásából eredő jelenséget) becslést adott a Nap és Hold Földtől mért távolságának arányára, hétperces pontossággal megállapította a napév hosszát úgynevezett **gömbi koordinátákat** használva.

Papposz (Kr. u. 4. sz.), szintén görög matematikus, 8 kötetes matematikai gyűjteményéből csak részletek maradtak fenn. Mai tudásunk a görög matematikáról javarészt ebből a műből származik, amelyben a geometriát zömében algebrai módszerekkel tárgyalja.

Descartes 1637-ben megjelent Géometrie c. könyvében először alkalmazza az algebrát a görög geometriára, és ezzel megteremti az analitikus geometriát. (Tőle függetlenül hasonló eredményekre jutott Fermat is.)

Az analitikus geometria módszerét alkalmazza a kúpszeletek vizsgálatára többek között

J. **Wallis** /angol matematikus: 1616 -1703/ és **Leibniz** /német filozófus és matematikus: 1646 – 1716/ is. Így kezdtek kibontakozni a differenciál- és integrálszámítás körvonalai az analitikus geometria alapján.

Magyar tudósok közül **Taubner Károly** és **Fest Vilmos** egyik pályamunkájában /1838/ az első- és másodrendű síkgörbéket vizsgálta a gyakorlatban való előfordulásuk szerint. Egyik pályamunka sem tartalmaz többet, mint amit a hagyományos középiskolai analitikus geometria anyaga felölel.

Utalások az egyes kompetenciák kialakulását segítő kapcsolatokra

A **vektorokkal** (a matematika tantárgyon belül) az *egybevágósági transzformációknál* (eltolás) találkoznak a diákok, majd a *hasonlósági transzformációnál* (vektorok szorzása valós számmal) ahol lehetőség adódik az előzőekben tanultak összefoglalására is

A **fizika tantárgyon belül** sok lehetőség adódik arra, hogy bizonyos mennyiségeknél a *nagysághoz az irányt is hozzákapcsoljuk*, s a kettőt együtt tekintve egy új mennyiséget, egy úgynevezett **vektormennyiséget** definiáljunk

Ilyen módon kapcsoljuk például az *erő nagyságához az erőhatás irányát*, a *sebesség nagyságához a mozgás pillanatnyi irányát*, az *elmozdulás nagyságához az elmozdulás irányát* stb. Így alkotjuk meg az erő,- a sebesség- és az elmozdulás-vektorát.

E „vektormennyiségekkel” szemben az *egyetlen számmal jellemezhető mennyiségeket* „skaláris” mennyiségeknek nevezzük. Ilyen például egy test tömege, egy test hőmérséklete, egy háromszög területe stb.

A középiskolás diákoknak már van tapasztalatuk abban, hogy a fizika bizonyos törvényeit egyszerűbben tudják megfogalmazni vektorokkal, mint vektorok nélkül.

E törvényekben rendszerint *két vektorhoz meghatározott módon hozzárendelünk* (szerkesztünk, számítunk) *egy harmadik vektort, vagy egy skalárt*. Ezek a szerkesztési (számítási) eljárások sok hasonlóságot mutatnak az algebrai műveletekkel.

Ezért célszerű a vektorokkal végzett műveletekre az algebrai műveletek elnevezéseit és jeleit alkalmazni.

Ily módon az *algebrai azonosságok és tulajdonságaik egy részét, valamint az algebrai műveletekben szerzett jártasságokat eredményesen lehet felhasználni a vektorokkal végzett műveleteknél is.*

A vektorok tanulmányozása során egy-egy test (kocka, téglatest) éleire illeszkedő vektorok (három, nem egy síkban lévő vektor) előkészítik a *síkbeli, illetve a térbeli koordináta-rendszer használatát*.

A koordináta-geometria „módszere” az igazán új a tanulók számára!

Ha tudják a függvényekről, az egyenletekről, egyenletrendszerekről korábban tanultakat „kapcsolni” az új fogalmakhoz, akkor eredményesen tudják alkalmazni a koordináta-geometria módszerét és az ott szereplő fogalmakat is.



Ajánlások a digitális anyag használatához

Több évtizedes tapasztalatom, hogy a középiskolás matematika tananyagban **a vektorokkal és a koordináta-geometriával kapcsolatos fejezetek nem tartoznak a tanítványok kedvelt témakörei közé.**

Ezt mutatták az elért eredmények és erről szóltak a tanulóktól szerzett közvetlen információim is.





Keresve az okokat és kutatva a jobb eredmény elérésének lehetőségeit, elhatároztam, hogy új lehetőségeket alkalmazva főleg a motivációs indítékok, a témához kapcsolódó attitűdök és a közvetlen cselekvésre épülő, sikerélményt adó együttműködés lehetőségeit használom ki.

Alapvető feladatnak tekintettem a különböző tudáskritériumok közül a **felismerési és a kapcsolási kritérium produktív szintjének fejlesztését**

A fenti, tanítással-, tanulással kapcsolatos feladatok és a tanítványok véleményét is beépítve készítettem el, majd kipróbálás után kiegészítettem ezt a most közreadott digitális

segédanyagot, amely tartalmában az egész középiskolai tantervi anyagot tartalmazza, az érettségi vizsgák két szintjének megfelelően.

Tartalom szerinti egységek:

-  A vektor fogalma, elnevezések, egy vektor koordinátái, műveletek vektorokkal, két vektor skaláris szorzata.
-  A pont koordináta- geometriája.
-  Az egyenes koordináta-geometriája.
-  A kúpszeletek (kör, parabola, ellipszis, hiperbola) koordináta-geometriája.

Bízom benne, hogy a tanítványokkal „közös munkánk” kedvező hatással lesz az *egyéni motivációkra*, a kapcsolódó **matematikai kompetenciák** fejlesztésére és az *eredményességre* egyaránt.

A flash formátumú, animációkkal ellátott videó anyag, frontális vagy csoportokra bontott tanórai *foglalkozáson* (projektor, interaktív tábla felhasználásával, egyéni tanulásszervezési eljárások), vagy önálló tanulás, távoktatás *során is eredményesen használható.*



A most közreadott anyag más, mint egy tankönyv!

Ebben a munkában az egyes **fogalmak kialakulásának** „folyamatára”, a folyamat „láthatóvá tételére” (szükség esetén a lebontásra és újbóli felépítésére; a megismételhetőségre; a **cselekvésre**; a pontos fogalomalkotásra, mint a megértés legfontosabb láncszemére) helyeződik a hangsúly.

Azt vallom, hogy a képességfejlesztéshez, a matematikai kompetenciák fejlesztéséhez a **pontos ismeretek**, ezen belül a **fogalmak kialakulása nélkülözhetetlen**.

A digitális anyag alkalmazását összekapcsolva egy **interaktív óravezetéssel** a tanulás szempontjából igen lényeges elemek (hallás, látás, kapcsolódó tevékenység) **együttesen** jelennek meg, amelyek maximálisan támogatják a tanulás folyamatát.

Különös jelentősége van **a lassabban haladó tanulóknál** annak, hogy a „felépítés” **megismételhető**, az **egyéni haladás üteme megválasztható**, egy-egy részem újragondolható.

Minden modulban található olyan elemek, amelyek a napi gyakorlattal, a felhasználhatósággal való kapcsolatokra is utalnak.

A **módul -rendszerben felépülő projekt** lehetőséget ad arra is, hogy minden felhasználó egyénileg is próbára tegye a modulonkénti tartalomnak megfelelő úgynevezett **felvett**, vagy **rögzített** tudását. A **quiz** kérdésekre adott válaszokat a program kiértékeli, így a „visszacatolás” közvetlenül is megtapasztalható.

Minden modul végén (a quiz kérdések előtt) megtalálható a **„Kislexikon”**, amely kiemeli, illetve összegzi a tárgyalt téma szempontjából a legfontosabbakat.

Kiemelt szempontok

- A **vektorokkal** (síkbeli, térbeli) **végzett műveletek eredményeinek** (vektor, szám) tudatosítása, pontosítása és **szemléletes** bemutatása nagyban hozzájárul a szükséges **fogalmak kialakulásához**, a **műveleti tulajdonságok egyszerű értelmezéséhez**.
→
- A fenti műveletek **jól előkészítik** a pont koordináta-geometriáját. A különböző összefüggéseknek a koordinátákkal való kifejezése ezek után egyszerű alkalmazása a vektoroknál tanultaknak.
→
- Az **egyenes egyenletének** értelmezése **a pontthalmazt egyértelműen meghatározó adatok felhasználásával** (két adott pont, egy pont és az egyenes irányát meghatározó valamelyik adat) elősegíti a **geometriai tulajdonságok algebrai módszerekkel történő jellemzését**.
→
- Az **egyenes egyenletének** (alapadatoktól függő) **különböző alakjait**, egymásból való származtatási lehetőségeit részletesen bemutatja a sorozat. Mindez **nem közlő** jellegű, hanem **probléma elé állítja a tanulókat** azáltal, hogy a **végigjárandó utakat kijelöli, és önálló tevékenységre készítet**.

- A síkbeli egyenesek kölcsönös helyzetének vizsgálatánál fontos szempont az *algebrai módszer alkalmazása*, a lehetőségek szükséges és elégséges feltételeinek bemutatása, *kapcsolata* azokkal a megállapításokkal, amelyeket az *elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek* megoldásával (megoldások számával) kapcsolatban már korábban tanultak.

➡
- *A távolság-meghatározásoknál* két utat is bemutat a videó. Az egyik, az adott geometriai fogalom (két pont, pont és egyenes) értelmezését követi, a másik bemutatja az egyenes normál-egyenletéből való meghatározási lehetőséget.

➡
- *A szögfelező egyenletének* egyszerű meghatározási módja, mint két metsző egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza, sok feladat megoldása során lehet hasznos összefüggés.

➡
- *A kúpszeletek egyenletei* (különböző alakjai) az adott ponthalmaz, mint mértani hely meghatározására épülnek, több lehetőséget is bemutatva.

➡
- *Az egyenes és a kúpszeletek kölcsönös helyzetének vizsgálata* a másodfokú egyenleteknél (diszkrimináns vizsgálata) tanultakra épül. A *sugársor egyenletét*, mint lehetőséget természetesen bemutatom.

➡
- *A kúpszeletekkel kapcsolatos ábrák* (kör, ellipszis, parabola, hiperbola) a középszintű érettségi vizsga tartalmi követelményeinél többet tartalmaznak, gondolva az érdeklődő tanulókra és az emelt szintű érettségi vizsga követelményeire.

A témakör tantervi elhelyezése

★ 9-10. évfolyam: (a helyi tantervtől függően) **I. fejezet 1.-2. modul**

★ 11. évfolyam: **II.-IV. fejezet**



Tartalom szerinti összegezés

| Téma | A fejezet és a modul sorszáma |
|--|-------------------------------|
| A vektor fogalma, a vektort egyértelműen meghatározó adatok, vektorokkal végzett műveletek és azok tulajdonságai | I. fejezet: 1. modul |
| Vektorok felbontása, helyvektorok, helyvektorok koordinátái; két pont által adott vektor | I. fejezet: 2. modul |
| A vektor abszolút értéke | I. fejezet: 2. modul |
| Egy vektor 90° -os elforgatottja Két vektor skaláris szorzata | I. fejezet: 2. modul |
| A koordináta-geometria módszerei | II. fejezet: 3. modul |
| A pont koordináta-geometriája | II. fejezet: 3. modul |
| Az egyenes koordináta-geometriája A lineáris programozás elemei | III. fejezet: 4. modul |
| Távolság-meghatározások | III. fejezet: 4. modul |
| A kör koordináta-geometriája | IV. fejezet: 5. modul |
| Kör és egyenes, két kör kölcsönös helyzete | IV. fejezet: 5. modul |
| A parabola | IV. fejezet: 6. modul |
| Az ellipszis | IV. fejezet: 7. modul |
| A hiperbola | IV. fejezet: 7. modul |
| Az ellipszis és a hiperbola kanonikus egyenlete | IV. fejezet: 7. modul |
| Kúpszeletek, mint a forgáskúp síkmetszetei | IV. fejezet: 7. modul |



A vektorok és a koordináta-geometria

c. projekt

fejezetenkénti rövid tartalmi összegezése

| | | | | |
|--|--|--------------|----------------------|-----------------|
| A teljes projekten belüli fejezet sorszáma: I. | Címe: Vektorok | Képek száma: | Quiz kérdések száma: | Lejátszási idő: |
| Modul sorszáma: 1. Mérete: 1, 89 MB | A vektor fogalma, elnevezések, műveletek vektorokkal | 17 | 23 | 23: 42 |

Részletekről

| Cím: | Rövid tartalom: |
|--|---|
| A vektor fogalma, elnevezések ₁ . | A vektort meghatározó <i>adatok</i> , fontosabb <i>elnevezések, jelölések</i> ; egyenlő vektorok, ellentett vektorok, nullvektor; párhuzamos eltolás és a vektor. |
| A vektor fogalma, elnevezések ₂ | A vektor abszolút értéke, két vektor irányszöge; helyvektor, szabad-vektor |
| Vektorok összeadása ₁ | Paralelogrammaszabály, összefűzési eljárás |
| Vektorok összeadása ₂ | Párhuzamos vektorok összeadása, műveleti tulajdonságok |
| Vektorok kivonása ₁ | A különbségvektor, a különbségvektor szerkesztése; műveleti tulajdonságok |
| Vektorok kivonása ₂ | Párhuzamos vektorok kivonása; a különbségvektor tulajdonságai |
| Vektor szorzása valós számmal ₁ | A művelet <i>értelmezése</i> és szemléletes <i>bemutatása; tulajdonságok.</i> |
| Vektor szorzása valós számmal ₂ | Általánosítás; egy adott vektor irányába mutató egységvektor; műveleti tulajdonságok |
| Kislexikon | A legfontosabb tudnivalók kiemelése |



| | | | | |
|---|---|--------------|----------------------|-----------------|
| A teljes projekten belüli fejezet sorszáma: I. | Címe: Vektorok | Képek száma: | Quiz kérdések száma: | Lejátszási idő: |
| Modul sorszáma: 2. Mérete: 2, 2 MB | A vektor felbonthatósági tétele, koordinátái, műveletek vektorokkal, skaláris szorzat | 21 | 35 | 31: 29 |

Részletekről

| Cím: | Rövid tartalom: |
|---|--|
| Vektorok felbontása ₁ | Felbontás a síkon; bázisvektorok, a vektor koordinátái. |
| Vektorok felbontása ₂ | Felbontás a térben; bázisvektorok, a vektor koordinátái |
| Helyvektorok ₁ | A helyvektor <i>értelmezése</i> ; egy szakasz <i>felezési pontjába</i> mutató helyvektor |
| Helyvektorok ₂ | Egy szakaszt tetszőleges arányban osztó pont helyvektora |
| A helyvektor koordinátái ₁ | Egy vektor koordinátái a síkbeli <i>derékszögű koordináta-rendszerben</i> . |
| A helyvektor koordinátái ₂ | Egy vektor koordinátái a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben |
| A helyvektor koordinátái ₃ | Áttérés új koordináta-rendszerre |
| Egy vektor abszolút értéke ₁ | Síkbeli vektor <i>hosszának</i> meghatározása a síkbeli derékszögű <i>koordináták</i> felhasználásával |
| Egy vektor abszolút értéke ₂ | Meghatározása térbeli derékszögű koordinátákkal |
| Vektorokkal végzett műveletek ₁ | Egy vektor szám-szorosának koordinátái a derékszögű koordináta-rendszerben |
| Vektorokkal végzett műveletek ₂ | Az összegvektor koordinátáinak meghatározása |
| A két pont által adott vektor koordinátái és hossza | A koordináták meghatározása helyvektorokkal; a vektor hossza koordinátákkal kifejezve |
| Egy vektor 90 fokos elforgatottja | Az elforgatott vektor koordinátáinak meghatározása helyvektorokon bemutatva |
| Két vektor skaláris szorzata ₁ | A skalárszorzat bemutatása, a skaláris szorzat értékei; a hajlásszög meghatározása |
| Két vektor skaláris szorzata ₂ | A skaláris szorzat tulajdonságai; a skaláris szorzat koordinátákkal kifejezve |
| Kislexikon | A legfontosabb tudnivalók kiemelése |

| | | | | |
|--|--|--------------|----------------------|-----------------|
| A teljes projekten belüli fejezet sorszáma: II. | Címe: A pont koordináta-geometriája | Képek száma: | Quiz kérdések száma: | Lejátszási idő: |
| Modul sorszáma: 3. Mérete: 1,02 MB | | 7 | 12 | 8: 26 |

Részletekről

| Cím: | Rövid tartalom: |
|--|---|
| Koordináta-geometria | <i>Módszere</i> ; fontosabb elnevezések: vektoregyenlet, alakzat egyenlete, feladatok megoldásának <i>általános módszerei</i> |
| A pont koordináta-geometriája ₁ | <i>Két pont távolsága</i> koordináták függvényében |
| A pont koordináta-geometriája ₂ | Egy szakaszt adott arányban osztó pont koordinátáinak meghatározása |
| A pont koordináta-geometriája ₃ | Nevezetes arányok: felezési pont, harmadoló pont; a háromszög súlypontjának koordinátái |
| Kislexikon | A legfontosabb tudnivalók kiemelése |



| | | | | |
|---|---|--------------|----------------------|-----------------|
| A teljes projekten belüli fejezet sorszáma: III. | Címe: Az egyenes koordináta-geometriája | Képek száma: | Quiz kérdések száma: | Lejátszási idő: |
| Modul sorszáma: 4. | Mérete: 2, 82 MB | 22 | 40 | 39: 33 |

Részletekről

| Cím: | Rövid tartalom: |
|--|---|
| Az egyenest egyértelműen meghatározó adatok ₁ | Két pont, egy pont és az irányát meghatározó ismertebb adatok (irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens fogalma) |
| Az egyenest egyértelműen meghatározó adatok ₂ | Két adott pontból az irányvektor; az iránytangens; a normálvektor |
| Az egyenes irányvektoros egyenlete | A paraméteres <i>vektoregyenlet</i> ; a <i>paraméteres egyenletrendszer</i> ; az adott ponton átmenő, <i>adott irányvektorú egyenes egyenlete</i> . |
| Az egyenes egyenletének különböző alakjai ₁ | Az adott ponton átmenő, adott normálvektorú; az adott ponton átmenő, adott iránytangensű egyenes egyenlete |
| Az egyenes egyenletének különböző alakjai ₂ | Az iránytényező alak; normálalak; tengelymetszetes alak; a sugársor egyenlete |
| Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete, egyenletrendszere | <i>Vektoregyenlet</i> , <i>paraméteres egyenletrendszer</i> , az egyenes <i>iránytangense</i> ; Euler-féle egyenes. |
| Párhuzamos és merőleges egyenesek | Párhuzamosság és merőlegesség vizsgálata az egyenes irányát (állását) meghatározó adatok segítségével |
| Két egyenes hajlásszöge | A hajlásszög <i>értelmezése és meghatározásának különböző módjai az irányvektorok, a normálvektorok és az iránytangens segítségével</i> |
| Két egyenes kölcsönös helyzetének vizsgálata a síkon | Az egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszerek <i>megoldhatóságának vizsgálata alapján</i> |
| Pontnak egyenestől való távolsága | Távolság meghatározása: <i>a szerkesztés elve alapján; az egyenes normál-egyenletének felhasználásával.</i> |
| Két egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok | A <i>középpárhuzamos</i> és a <i>szögfelezők</i> egyenlete |
| A lineáris programozás elemei | Maximum célfüggvény vizsgálata grafikus módszerrel |
| Kislexikon | A legfontosabb tudnivalók kiemelése |



| | | | | |
|---|-------------------------------|--------------|----------------------|-----------------|
| A teljes projekten belüli fejezet sorszám: IV. | Címe: A kúpszeletek | Képek száma: | Quiz kérdések száma: | Lejátszási idő: |
| Modul sorszám: 5. Mérete: 1, 69 MB | A kör koordináta-geometriája | 15 | 16 | 23: 54 |

Részletekről

| Cím: | Rövid tartalom: |
|---|---|
| A kör egyenlete ₁ | A kört egyértelműen meghatározó ismertebb <i>adatok</i> ; Apollonios-féle kör; Feuerbach-féle kör. |
| A kör egyenlete ₂ | A körvonal, mint mértani hely; a kör általános egyenlete |
| A kör egyenlete ₃ | Speciális helyzetű körök egyenlete |
| A kör és a kétismeretlenes másodfokú egyenlet | <i>Valós kör; pontkör; képzetes kör; szükséges és elégséges feltételek.</i> A másodfokú kétismeretlenes egyenlet és a valós kör egyenlete |
| Kör és egyenes kölcsönös helyzete (egy síkban lévő) | A kör és az egyenes egyenletéből álló <i>egyenletrendszer vizsgálata</i> ; |
| Két egysíkú kör kölcsönös helyzete | A két kör egyenletéből álló <i>egyenletrendszer vizsgálata</i> . |
| A kör érintőjének egyenlete ₁ | A kör <i>adott pontjába</i> húzható érintő egyenlete |
| A kör érintőjének egyenlete ₂ | <i>Adott külső pontból húzható érintők egyenlete.</i> Sugársorból az érintő kiválasztása |
| A kör érintőjének egyenlete ₃ | <i>Adott egyenessel párhuzamos, adott egyenesre merőleges érintők</i> |
| Kislexikon | A legfontosabb tudnivalók kiemelése |



| | | | | |
|--|-----------------------------------|--------------|----------------------|-----------------|
| A teljes projekten belüli fejezet sorszáma: IV. | Címe: A kúpszeletek | Képek száma: | Quiz kérdések száma: | Lejátszási idő: |
| Modul sorszáma: 6. Mérete: 1, 54 MB | A parabola koordináta-geometriája | 14 | 11 | 23: 38 |

Részletekről

| Cím: | Rövid tartalom: |
|--|--|
| A parabola, mint mértani hely | A parabola, mint <i>ponthalmaz, elnevezések</i> |
| A parabola kanonikus egyenlete ₁ | A parabola <i>egyenlete</i> , ha fókuszpontja $F(0; \frac{p}{2})$; felhasználva a parabola, mint <i>mértani hely</i> definícióját; tengelypontja az origó, tengelye az y tengely. |
| A parabola kanonikus egyenlete ₂ | A T(0; 0) tengelypontú, x tengelyű parabolák egyenletei |
| A parabola általános egyenlete | A <i>koordináta-tengelyekkel párhuzamos</i> tengelyű parabolák egyenletei. |
| A másodfokú függvény és a parabola | A parabola és a <i>másodfokú függvény</i> ; függvényből a parabola jellemző adatainak meghatározása; a <i>három</i> ponton átmenő parabola egyenlete. |
| Parabola és a pont; Parabola és az egyenes kölcsönös helyzete | Kölcsönös helyzet vizsgálata a <i>fókuszpont</i> és a <i>vezéregyenes</i> távolságát felhasználva; az egyenletrendszer vizsgálata |
| A parabola tulajdonságai | Érintő, fókuszpont tulajdonságai, vizsgálata. |
| Kislexikon | A legfontosabb tudnivalók kiemelése |



| | | | | |
|--|--|--------------|----------------------|-----------------|
| A teljes projekten belüli fejezet sorszáma: IV. | Címe: A kúpszeletek | Képek száma: | Quiz kérdések száma: | Lejátszási idő: |
| Modul sorszáma: 7. Mérete: 1, 23 MB | Az ellipszis és a hiperbola koordináta-geometriája | 12 | 8 | 17: 54 |

Részletekről

| Cím: | Rövid tartalom: |
|---|---|
| Az ellipszis, mint mértani hely | Az ellipszis, mint ponthalmaz; <i>elnevezések;</i> |
| Az ellipszis tulajdonságai | Érintők és a főkör vizsgálata |
| A hiperbola, mint mértani hely | A hiperbola, mint ponthalmaz; <i>elnevezések;</i> |
| A hiperbola tulajdonságai | Érintők, vezérgör és főkör |
| Az ellipszis és a hiperbola kanonikus egyenlete | Az egyenlet meghatározásának <i>egy lehetséges</i> módja. Középpontjuk a koordináta-rendszer kezdőpontja, fókuszpontjuk az <i>x</i> tengelyen |
| Kúpszeletek, mint a forgáskúp síkmetszetei ₁ | A kör és az ellipszis <i>származtatása.</i> |
| Kúpszeletek, mint a forgáskúp síkmetszetei ₂ | A parabola és a hiperbola <i>származtatása.</i> |
| Kislexikon | A legfontosabb tudnivalók kiemelése |



A teljes projekt mindegyik részéhez, a **szokványos feladatgyűjteményektől eltérő gyakorló feladatok** is készültek

A megoldásra **javasolt feladatok** a 9 – 12. évfolyamos tanulók **középszintű és emelt szintű érettségi vizsga tantervi követelményeihez** kapcsolódnak, (a kötelező tantervi anyagon túli kitekintést is elősegítve), a következő témakörökben:

1. A vektorok, a vektorokkal végzett műveletek (20 projekt)

- összeadás, kivonás, számmal való szorzás,
- egy vektor és 90 fokos elforgatottja,
- vektorok felbonthatósági tétele,
- vektorok skaláris szorzata

2. A pont koordináta geometriája. (8 projekt)

- a felezőpont, a harmadoló-pont, az adott arányban osztó pont koordinátái a szakasz végpontjainak koordinátaival kifejezve
- a háromszög súlypontjának koordinátái a csúcspontok koordinátáinak függvényében
- két pont távolsága a pontok koordinátaival kifejezve.

3. Az egyenes koordináta geometriája. (14 projekt)

- egy egyenest egyértelműen meghatározó adatok
- az egyenes egyenletének különböző alakjai, ezek közötti kapcsolatok
- pont és egyenes, két egyenes kölcsönös helyzetének a vizsgálata
- pont és egyenes távolsága
- két egyenes távolsága
- két egyenes hajlásszöge.

4. A kúpszeletek koordináta geometriája. (30 projekt)

- a kört egyértelműen meghatározó adatok, a kör egyenlete
- a kör és egyenes, két kör kölcsönös helyzete,
- a parabola egyenlete, a parabola és az egyenes, két parabola kölcsönös helyzete
- az ellipszis egyenlete
- a hiperbola egyenlete
- az ellipszis, a hiperbola és az egyenes.

A megoldásra javasolt „projektek” nem a hagyományos értelemben vett feladatok (egy probléma, egy kérdés, egy válasz), hanem az adott témán belüli résztémákhoz kapcsolódó **feladat-létesítmények**, átlagosan 4 -5 hagyományos értelemben vett feladattal.

Ez a szerkezet és tartalom azt kívánja bemutatni, hogy a **napi munka során is** olyan **terveket** kell alkotni, feladatok megoldásához **eljárásokat keresni**, amelyek közelebbi vagy távolabbi pontokon összekapcsolódnak, egymást erősítik, bizonyos esetekben egymás nélkül nem léteznek.



Lehetőséget ad ez a struktúra arra is, hogy **egyenre-szabottan**, az egyéni haladás ütemének figyelembevételével **vonzóbbak legyenek a tanulás feltételei és körülményei**, továbbá a **sikernek, mint fontos motiváló tényezőnek mindenki részese lehessen.**

A személyre szabott feladat (feladatok) kiválasztásával lehetőség nyílik **az egyéni próbatételre**, egy-egy **technikai elem gyakorlására** (gyakoroltatására), a témával kapcsolatos **látókör bővítésére**, a **tudásszint** (ismeretek és a hozzá kapcsolódó operatív tevékenységek) **menyiségi, minőségi, tartóssági, gyakorlati életben való felhasználhatósági mutatóinak alaposabb megismerésére.**

Mindezek nagyban elősegítik azoknak az, un. **Önszabályozó rendszereknek** (önismeret és önértékelés, pozitív tanulási attitűd, motiváció, egyéni tanulási utak) kialakulását, **amelyek nélkül igazi tanulásfejlesztésről csak beszélünk, de a megvalósulásáért nem cselekszünk.**

Azt tartom, hogy az **ismeretek maradáóságára és felhasználhatóságára szempontjából** igen lényeges a **pontos fogalomalkotás**. Ez a **megértés** folyamatának egyik kritikus pontja, amelyet nagyban elősegít a **tevékenység és a megtapasztalás.**

A megértésnek további két kritikus pontjára is érdemes nagy figyelmet fordítani.

Nevezetesen az **összefüggések feltárására és megragadására** (pl. adott fogalmon belüli, fogalomcsoporton belüli, már tanult fogalmakhoz kapcsolódó, okok és következmények stb.), továbbá **a logikai felismerésre**, amely egy bizonyos fogalomnak, jelenségnek stb. **logikai osztályba vagy fogalomrendszerbe való elhelyezését jelenti.**

Ez a „felismerés” **nem egyszerű besorolás**, hanem az **aktív gondolkodási tevékenységre épül**. Minél jobban megértjük a „tananyagot”, annál több kapcsolatot találunk, az-az jobban tudunk emlékezni a tanultakra. Leegyszerűsítve, de a lényegét megragadva azt mondhatjuk: így kapcsolódik a megértés az ember hosszú távú memóriájának működéséhez, ahol az un. **Felidőzésnek (előhívásnak) nélkülözhetetlen alapja a megértés**

Az egyes **„projektek” után megfogalmazott (a megoldást előkészítő, segítő) kérdések** példák arra, amit a megértés fontos próbáinak nevezünk:

- a kérdezni tudás (a jó kérdés mögött mindig megértés rejlik)
- a probléma saját szavakkal történő megfogalmazása.

Ez az iránymutatás az **ismeretek fontosságát** emeli ki, amelyek a kompetenciák egyik alapelemei és nélkülük a kognitív képességek nem fejleszthetők.

A kapcsolódó videó részleteken a feladatok megoldásához szükséges **elméleti és gyakorlati alapokat** (fogalmakat, szabályokat, összefüggéseket, értelmezéseket, elemzéseket, folyamatokat, terveket, adatokat, elnevezéseket, tényeket) **tanulmányozhatja és tanulhatja a felhasználó.**

Teheti mindezt úgy, hogy **saját tevékenységén keresztül megtapasztalhatja** az összefüggéseket, és a szabályok „létrejöttét”. Ezzel lehetőség nyílik arra, hogy az egyéni tanulás kerüljön előtérbe, továbbá a tanórai munka során az **„átlaghoz” igazodó magyarázatok helyett a személyes tanulásirányításra, tanulószervezésre és a tanulásfejlesztésre lehessen koncentrálni.**



A megoldási lehetőségek és a közölt eredmények nem tartalmazzák a minden részletre kiterjedő megoldásokat.

Arra hivatottak, hogy:

- a) segítsék az „elindulást”,
- b) a megoldás közben folyamatos visszajelzése legyen a felhasználónak,
- c) a feladat kérdésére adott választát (megoldását) ellenőrizni tudja,
- d) saját munkájáról megerősítést vagy kritikát kapjon.

A hasonló elnevezést viselő **tanári és tanulói verzió összefüggő egységet** alkot a tanítás-tanulás folyamatában.

A tanári verzió a tanórai munkát, a tanulói változat a tanórai és a tanórán kívüli (elsősorban az otthoni) tanulást hivatott segíteni. Ez a segítség megnyilvánul a célirányosságban, a személyre szabottságban és az idővel való takarékosabb „gazdálkodásban” is.

Javaslatok a felhasználóknak:

Egy-egy **témakör tanulását megelőzően** célszerű az adott témához kapcsolódó videó részleteket (otthoni munka során) tanulmányozni (áttekinteni), hogy kialakuljon egy elképzelés a „fő” témákról.

Ennek a tanulási szakasznak legfontosabb mozzanatai a „felépített” (esetleg az ismételten felépített) részlet újbóli áttekintése, a felépítés „megszervezésének” részletes átgondolása, ezáltal a vizuális „élmények” minél pontosabb elraktározása.

Érdeemes azon is elgondolkodni, hogy amit láttak, **hogyan lehet más, korábban megismert fogalmakkal, szabályokkal, tényekkel stb. kapcsolatba hozni.**

Dönthet a felhasználó úgy is, hogy a **kulcsfontosságúnak vélt új fogalmakat**, összefüggéseket, eljárásokat stb. külön is leírja.

Ezeket érdemes „mellékelni” azokhoz a **külön megfogalmazott egyéni kérdésekhez, észrevételekhez, ötletekhez, amelyre a tanuló a tanórán „választ szeretne kapni”**.

Ezzel a **tanórai közös munkára, a tanulásra, felkészülhet a felhasználó**, ami legalább olyan fontos, mint a tanítási órát követő tanulás. Ez az igazi biztosíték arra, hogy a tanórai munka mindenkihez kötődik, és nem az érdektelenség tükröződik a tanítványok arcán.

Így **kötődhet** a tanítási óra folyamata egyéni érdekekhez, így tehető célirányossá és az idővel is takarékoskodni tudó közös munkafolyamattá. Ilyen **„munkaszervezésnél”** nincs szükség az „átlaghoz” szóló magyarázatokra, a táblára írtak értelmetlen másolására vagy az „új tankönyvet író” tanári diktálásokra. (Ez az idő sokkal hatékonyabban és mindenki számára sikereiben-gazdagabban is eltölthető.)

Tapasztalatom szerint az ilyen **„előkészítő” típusú házi feladatok** „megoldásával” lényegesen hatékonyabb a tanórai tanítás-tanulás folyamata, az egyéni ismeretszerzés, mint az „ötletszerűen kijelölt”, és megkérdőjelezhetően önálló munkával, gyakran sok időpazarlással elkészült házi feladatok kitűzésével.



A különböző szintű **ismeretek gyakorlati alkalmazására** gazdag lehetőséget kínálnak – tanárnak és tanítványnak – az általam készített feladat-építmények.

Különösen sokat segítenek **megfelelő tanítási-tanulási folyamat szervezése esetén:**

- az **önálló tanulás** tervezésében, szervezésében és végzésében
- a végzett **munka eredményességének** visszajelzésében, **megerősítésében**
- az **önszabályozó rendszerek** fejlesztésében
- a **házi feladatok elkészítésével** kapcsolatos problémák rendezésében („nem tudtam elindulni”, „nem értem”, „nem tudtam megoldani”, értelmetlen másolások stb.)
- tanórákon a **házi feladatok időigényes ellenőrzésében**, amely adott esetben az egész tanóra menetét (időbeosztását, a tartalmi munkát) kedvezőtlenül befolyásolja
- az **egyéni gyakorló feladatok kijelölésében**, megválasztásában és azok megoldásának ellenőrzésében
- **témazáró dolgozatokra való felkészülésben**
- **ismétlő rendszerezésben**

Bízom abban, hogy gondolataimmal és az általam összeállított segédanyaggal is hozzájárulok egy eddigiéknél sokkal hatékonyabb **tanulásfejlesztési folyamathoz** és ennek megvalósulását segítő **eszközrendszer sokoldalúbb használatához**.

Olyan közös munkához, amelyben kiemelt helyre kerül a tanulás tudatos, célirányos és személyre szóló segítése. Átala egy olyan **„partneri”** munkakapcsolat kialakításához, amely a tanuló **önszabályozó rendszereinek** fejlődését maximálisan támogatja.

A fenti gondolatok jegyében ajánlom ezt a **saját és kedves tanítványaim** tapasztalataira épülő, de a **jelenünk új kihívásait** és **technikai lehetőségeit** figyelembe vevő munkámat a Tanulók és az őket tanító Kollégák figyelmébe.

Munkámmal kapcsolatosan minden jobbító szándékú észrevételt köszönettel fogadok!

Huszka Jenő

címzetes igazgató, nyugalmazott középiskolai tanár

